

Algoritma Matriks Segitiga Atas pada Metode Eliminasi Gauss dalam Menentukan Determinan

Zaini

*Prodi Teknik Elektro, Sekolah Tinggi Teknologi Bontang
e-mail:zaini.math@gmail.com*

Abstract

Gaussian elimination method can be used in determining the determinant of the matrix which has no special term and capable to accelerate the calculation for various fields. Meanwhile, the algorithm applied by Zaini in his research through the examination of results one by one. Therefore, it is necessary for further development. Development method used is library research and laboratory study in laboratory using Matlab. The collected data is then tested using white box and observation of calculation result compared to the manual process. The results showed that the algorithm developed under valid conditions and the calculation results in constructing the lower triangular matrix between the algorithm and the manual process has no difference.

Keywords : Algorithm, Upper triangular matrix, Gaussian elimination

Abstrak

Metode eliminasi Gauss digunakan untuk menentukan determinan matriks tanpa memiliki suatu persyaratan dan mampu mempercepat perhitungan untuk berbagai bidang. Sementara itu, algoritma yang diterapkan Zaini dalam penelitiannya melalui pemeriksaan hasil secara satu per satu. Oleh sebab itu, dipandang perlu untuk pengembangan lebih lanjut. Metode pengembangan yang digunakan adalah *library research* dan praktikum di laboratorium dengan menggunakan Matlab. Data yang terhimpun selanjutnya diuji menggunakan *white box* dan pengamatan hasil perhitungan yang dibandingkan dengan proses manual. Hasil penelitian menunjukkan bahwa algoritma yang dikembangkan dalam kondisi valid dan hasil perhitungan dalam mengkonstruksi matriks segitiga atas antara algoritma dengan proses manual tidak memiliki perbedaan.

Kata kunci : Algoritma, Matriks segitiga atas, Eliminasi Gauss

1. Pendahuluan

Determinan matriks dapat diimplementasikan dalam beberapa topik diantaranya adalah menentukan akar-akar polinomial dengan metode bairstow[1], transformasi sistem irigasi subak[2], dan *kriptografi hill cipher*[3]. Dari implementasi tersebut menandakan bahwa determinan memiliki peran yang sentral. Oleh sebab itu, penguasaan terhadap determinan menjadi tolak ukur keberhasilan dalam implementasinya.

Diketahui bahwa determinan sebagai bagian dari matriks dan merupakan materi yang diberikan dan dipelajari oleh siswa

SMA/SMK. Berkaitan dengan matriks, hasil penelitian [4] menunjukkan bahwa penguasaan siswa rendah pada operasi matriks dan konsep determinan sendiri sering dilupakan serta cara pandang siswa terhadapnya sebagai hal yang mudah padahal memiliki pengaruh yang cukup besar pada materi pendukungnya.

Menentukan determinan matriks dapat dilakukan dengan sembilan cara diantaranya adalah menggunakan definisi determinan, metode Sarrus, metode minor kofaktor, *Chio*, eliminasi Gauss, *Dekomposisi Matriks*, Salihu, dan dapat menggunakan software[5], [6]. Kesembilan cara yang dimaksud diketahui

bahwa metode Sarrus hanya berlaku untuk matriks berordo 2×2 dan 3×3 . Metode Chio digunakan untuk matriks berordo $n \geq 3$ dan $a_{11} \neq 0$ dan Metode Salihu digunakan untuk matriks berordo $n > 2$ [7]. Sedangkan metode dekomposisi matriks merupakan metode yang menggunakan pemisahan matriks menjadi matriks segitiga atas/bawah.

Berkaitan dengan metode menyelesaikan matriks berordo n yang tidak memiliki persyaratan khusus maka metode eliminasi Gauss dapat menjadi solusi yang dapat digunakan. Disamping itu, metode eliminasi Gauss merupakan metode untuk mempercepat perhitungan dalam berbagai bidang [8]. Dalam metode tersebut berlaku operasi baris elementer atau operasi kolom elementer. Operasi baris/kolom elementer meliputi penjumlahan, pengurangan, pertukaran, perkalian skalar, dan kombinasinya (penjumlahan-pengurangan-perkalian antar baris/kolom). Tujuan utama operasi ini untuk menghasilkan matriks segitiga atas atau matriks segitiga atas.

Metode eliminasi Gauss telah digunakan dalam penelitian [6] melalui Matlab. Penggunaan Matlab tersebut dimaksudkan sebagai media perhitungan. Disamping itu, media lain yang dapat digunakan adalah *Borland Delphi versi 6* [9]. Hasil penelitian [6] diperoleh bahwa pengujian determinan matriks 4×4 dan 5×5 disimpulkan bahwa tidak ada perubahan nilai determinan dari operasi baris elementer seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian skalar, dan kombinasi ketiganya. Sedangkan penggunaan operasi pertukaran antar baris berakibat pelibatan $(-1)^n$ dimana n menyatakan banyaknya pertukaran yang digunakan.

Algoritma atas penentuan hasil determinan matriks 4×4 dan 5×5 disadari memiliki keterbatasan. Keterbatasan tersebut yaitu penyusunan algoritma yang diterapkan pada matriks masih dilakukan dengan mengidentifikasi hasil secara satu per satu. Akibatnya untuk inputan matriks baru maka algoritmanya perlu dirancang dari awal. Oleh sebab itu, peneliti memandang perlu

untuk melakukan penelitian lebih lanjut sebagai pengembangan atas algoritma yang telah disusun.

Algoritma yang telah disusun dari penelitian [6] berorientasi pada pembentukan matriks segitiga atas dan hasil determinan diperoleh atas perkalian entri matriks yang terletak didiagonal utamanya dan $(-1)^n$, dimana n adalah banyaknya operasi pertukaran yang dilakukan. Untuk membentuk matriks segitiga atas maka operasi yang digunakan adalah operasi baris elementer yang terdiri dari operasi penjumlahan antar baris, pengurangan antar baris, perkalian skalar dengan baris, dan kombinasi ketiga-tiganya, serta pertukaran antar baris.

Dalam metode eliminasi Gauss, beberapa kondisi matriks memungkinkan operasi baris elementer dalam membentuk matriks segitiga tidak perlu dilakukan. Misalnya matriks nol (disimbolkan dengan O). Oleh karena itu, algoritma yang dikembangkan pada penelitian ini harus mampu menyajikan hasil matriks segitiga.

2. Metode Penelitian

Penelitian yang dilaksanakan termasuk penelitian kepustakaan (*library research*). *Library research* memiliki ciri-ciri bahwa data/bahan yang diperlukan dalam menyelesaikan penelitian berasal dari perpustakaan baik berupa buku, jurnal, dokumen, majalah dan lainnya [10]. Data yang diperlukan dalam penelitian ini adalah algoritma-algoritma yang memiliki keterkaitan dengan matriks segitiga atas yang menggunakan operasi baris elementer. Data primer yang digunakan tersedia pada [11] khususnya algoritma yang digunakan. Algoritma tersebut kemudian dianalisis dan dimodifikasi dengan menggunakan Matlab. Hasil dari proses tersebut selanjutnya diuji dengan pengujian *white box*. Algoritma dikatakan valid apabila tidak ditemukan kondisi error untuk setiap tahapannya. Algoritma yang telah valid selanjutnya diterapkan pada suatu matriks dan

hasil dibandingkan dengan proses manual untuk mengetahui kesamaan.

3. Hasil Penelitian

Matriks segitiga atas didefinisikan sebagai suatu matriks yang memiliki entri-entri di atas diagonal utamanya adalah nol. Bentuk umum matriks segitiga atas adalah

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga atas dapat dibangun dari suatu matriks melalui proses eliminasi baris dan kolom elementer. Berkaitan dengan operasi tersebut, penelitian ini memfokuskan hanya pada operasi baris elementer.

Proses pembentukan matriks segitiga atas untuk suatu matriks berordo $n \times n$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{dimana } a_{nn} \neq 0$$

diawali dengan pengubahan entri masing-masing baris pada kolom ke-1 dimana baris ke-1 tetap. Masing-masing baris yang akan dirubah akan dikaitkan dengan baris ke-1 digunakan rumus

$$\left(b_t - \frac{a_{t1}}{a_{11}} b_1 \right) \quad (1)$$

dimana:

b_t = baris ke- t

b_1 = baris ke-1

a_{t1} = entri matriks pada baris ke- t kolom ke-1

$t = 2, 3, \dots, m$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} & a_{23} - \frac{a_{21}a_{13}}{a_{11}} & \dots & a_{2n} - \frac{a_{21}a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & a_{32} - \frac{a_{31}a_{12}}{a_{11}} & a_{33} - \frac{a_{31}a_{13}}{a_{11}} & \dots & a_{3n} - \frac{a_{31}a_{1n}}{a_{11}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} - \frac{a_{n1}a_{12}}{a_{11}} & a_{n3} - \frac{a_{n1}a_{13}}{a_{11}} & \dots & a_{nn} - \frac{a_{n1}a_{1n}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

tahap selanjutnya beralih pada kolom ke-2 dimana baris ke-1 dan ke-2 tetap. Masing-masing baris pada kolom kedua dikaitkan dengan baris ke-2 dengan rumus

$$\left(\frac{a_{k2}a_{11} - a_{k1}a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \right) b_2 \quad (2)$$

a_{k2} = entri matriks pada baris ke- k kolom ke-2
 a_{k1} = entri matriks pada baris ke- k kolom ke-1
 $k = 3, 4, \dots, m$ dan $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$

Tahap selanjutnya adalah kolom ke-3 dimana baris ke-1, ke-2, dan ke-3 tetap. baris selanjutnya dikait dengan baris ke-3 dengan rumus yang sesuai. Hal tersebut terus berlanjut hingga $n - 1$ kolom.

Berdasarkan pemrosesan maka terdapat 4 operasi yang digunakan yaitu penjumlahan dan pengurangan antar baris, perkalian baris dengan skalar, dan kombinasi ketiganya. Sementara itu, terdapat operasi pertukaran antar baris yang belum digunakan. Oleh karena itu, berikut diberikan 2 yang memungkinkan operasi baris elementer digunakan diantaranya adalah:

1. Operasi baris elementer tanpa pertukaran memenuhi syarat bahwa seluruh entri matriks antar barisnya adalah bilangan riil berbeda dan bukan nol.
2. Operasi baris elementer terdapat pertukaran memenuhi syarat yaitu selain baris pertama terdapat entri nol pada baris selanjutnya.

Algoritma yang telah selesai dianalisis dan dimodifikasi yang memungkinkan kondisi tersebut terpenuhi yaitu

```
function Konstruksi_MatriksSegitiga
clc;
clear;
disp('-----')
disp('PEMBENTUKAN MATRIKS SEGITIGA
    ATAS DALAM PERHITUNGAN
    DETERMINAN MATRIKS')
disp('MENGGUNAKAN ELIMINASI GAUSS
    ')
disp(' ')
disp('-----')
```

```

disp('Petunjuk:')
disp('1. Penulisan ordo matriks cukup
menggunakan satu bilangan')
disp(' - jika ditulis 2 berarti
matriks berordo 2 x 2')
disp(' - jika ditulis 3 berarti
matriks berordo 3 x 3, dst')
disp('2. Gunakan notasi matriks untuk
entri yang akan diinputkan [ ]')
disp('3. Gunakan spasi atau koma
untuk pemisah kolom pada matriks
inputan')
disp(' ')
disp('-----')
n=input('ordo matriks yang
diinginkan= ');
if n>=1; m=n;
    end
for i=1:n
    A(i,:)=input(['Inputkan semua
entri baris ke-' num2str(i) ' sampai
kolom ke-' num2str(m) '= ']);
end
disp(' ')
disp(' ')
disp('PROSES PEMBENTUKAN SEGITIGA
ATAS MELALUI OPERASI BARIS
ELEMENTER')
disp(A)
for i=1:n
    if A(i,i)==0
        a=i;
        while A(a,i)==0
            a=a+(i-1);
        end
        X=A(i,:);
        A(i,:)=A(a,:);
        A(a,:)=X;
        disp(['b' num2str(i) ' tukar
dengan b' num2str(a)])
        disp(A)
    end
    for j=i+1:n
        if A(j,i)~=0
            disp(['b' num2str(j) '-
(' num2str(A(j,i)) '/'
num2str(A(i,i)) ')b' num2str(i)])
            A(j,:)=A(j,:)-
((A(j,i)./A(i,i))*A(i,:));
            disp(A)
        end
    end
end

disp(' ')
disp('Hasil determinan diperoleh dari
perkalian entri matriks')

```

```

disp('yang terletak pada diagonal
utamanya'),transpose(diag(A))
disp('dan perkalian (-1) sebanyak n
faktor')
disp('atas n pertukaran yang
digunakan')
disp('-----')
end

```

Algoritma ini memuat 7 komponen penting diantaranya

1. Nama M-File dan perintah perhitungannya.
2. Pengantar dan petunjuk yang perlu diikuti.
3. Inputan ordo matriks dan entri-entri matriks.
4. Operasi baris elemeter terkait pertukaran antar baris.
5. Operasi baris elementer terkait penjumlahan, pengurangan, perkalian dengan skalar dan kombinasinya.
6. Entri pada diagonal atas matriks segitiga atas setelah diberikan operasi baris elementer.
7. Petunjuk untuk perhitungan pencarian determinan.

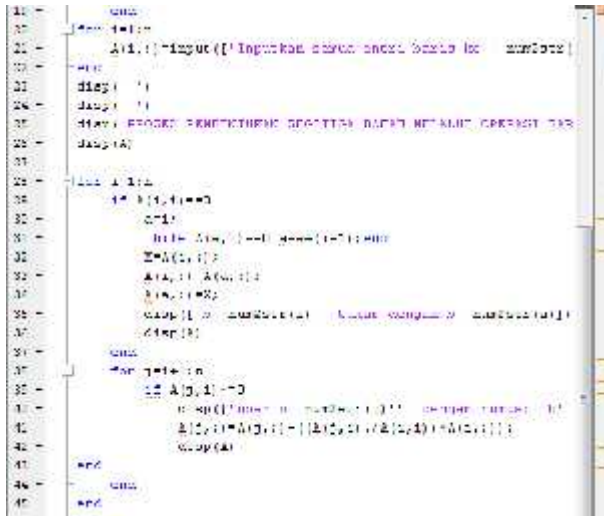
mekanisme kerja pada algoritma adalah sebagai berikut

1. User diberikan informasi petunjuk penginputannya.
2. Permintaan untuk menginputkan ordo matriks yang diinginkan
3. permintaan untuk menginputkan entri-entri matriks dari baris ke-1 hingga kolom ke-n sesuai inputan ordo.
4. pemeriksaan $A(1,1)$, $A(2,2)$, $A(n,n)$ jika tidak nol maka fungsi pertukaran tidak difungsikan dan operasi lainnya difungsikan.
5. pemeriksaan $A(1,1) = 0$, $A(2,2) = 0$, $A(n-1,n-1) = 0$ maka pertukaran difungsikan dan dilanjutkan pada point 4 secara berulang. Apabila kondisi 5 tidak terpenuhi maka algoritma akan menghentikan prosesnya yang menandakan bahwa matriks tidak sesuai.

4. Pembahasan

Algoritma yang digunakan untuk mengkontruksi matriks segitiga atas dari

matriks merupakan hasil modifikasi algoritma untuk menyelesaikan sistem persamaan linier homogen [11]. Hasil modifikasi menunjukkan bahwa algoritma dalam keadaan valid sebagaimana tanda warna sebelah kanan scroll yang diberikan di Matlab. Perhatikan gambar



Gambar 1 Verifikasi algoritma

dengan demikian, algoritma tersebut selanjutnya dipergunakan. Untuk menguji kebenaran hasil perubahan dari algoritma tersebut, peneliti membandingkan antara pemerolehan dengan algoritma dengan perhitungan manual.

2.1 Matriks yang sesuai kondisi algoritma.

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$,

hasil pengujian algoritma dapat dilihat pada gambar 1

Gambar 1 Tampilan hasil algoritma

2.2 Matriks yang tidak sesuai dengan algoritma.

5. Saran

Diperlukan adanya pengembangan penelitian lanjutan terkait algoritma sehingga memfungsikan perkalian $(-1)^n$ apabila terdapat

n pertukaran baris yang digunakan. Dengan demikian, pembaca dapat langsung menggunakannya tanpa harus menghitung determinannya secara manual.

6. Daftar Pustaka

- [1] I. Windra, M. L. Nasution, and M. P. Dewi, "Menentukan Akar-Akar Polinomial dengan Metode Bairstow," *UNP J. Math.*, vol. 2, no. 1, pp. 24–29, 2013.
- [2] W. Windia and S. Puspostardjo, "Transformasi Sistem Irigasi Subak Yang Berlandaskan Konsep Tri Hita Karana," *Agritech*, vol. XXIII, no. 1, pp. 1–15, 2003.
- [3] N. Puspita, Nikken Prima;Bahtiar, "Kriptografi Hill Cipher Dengan menggunakan Operasi Matriks," in *Seminar Nasional Ilmu Komputer UNDIP*, 2010, pp. 1–5.
- [4] H. Lesmana, E. Yusmin, and S. Sayu, "Pendesripsian Pemahaman Konseptual Siswa Menyelesaikan Soal-Soal Operasi Matriks Kelas X SMK N 3 Pontianak," *J. Pendidik. dan Pembelajaran*, vol. 4, no. 12, 2015.
- [5] Ruminta, *Matriks - Persamaan Linier dan Pemrograman Linier*, Edisi Revi. Bandung: Rekayasa Sains, 2014.
- [6] Zaini, "Model Penyelesaian Determinan Matriks dengan Metode Eliminasi Gauss Melalui Matrix Laboratory (MATLAB)," *J. Sains Terap.*, vol. 3, no. 1, pp. 15–21, 2017.
- [7] A. Salihu, "New Method to Calculate Determinants of $n \times n$ ($n \geq 3$) Matrix , by Reducing Determinants to 2nd Order," *Int. J. Algebr.*, vol. 6, no. 19, pp. 913–917, 2012.
- [8] M. Saeed, S. Nisar, S. Razzaq, R. Masood, and R. Imran, "Gaussian Elimination Method- A Study of Applications," *Glob. J. Sci. Front. Res.*, vol. XV, no. V, 2015.
- [9] A. H. Fauzijah, Ami & Hasan, "Visualisasi Alat Bantu Hitung Pencarian Nilai Determinan Matriks Dengan Metode Chio," in *Seminar Nasional Aplikasi Teknologi Informasi (SNATI)*, 2006, pp. 45–50.
- [10] H. Sutrisno, *Metodologi Research*. Yogyakarta: Fakultas Psikologi UGM, 1990.
- [11] -----, "TEKNIK DASAR KOMPUTASI MATEMATIKA," in *MATEMATIKA KOMPUTASI*, 2009, pp. 1–68.